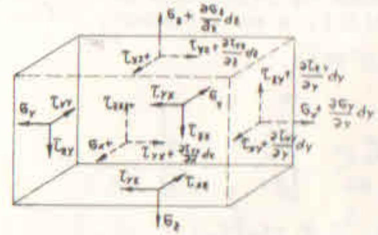
3. TEORIJA NAPONA I DEFORMACIJA

3.1. OSNOVI IZRAZI

Naponsko i deformaciono stanje u nekoj tački napregnutog tela (sl.12) odredjuje se tenzorom napona, odnosno tenzorom deformacija. U pravougaonom koordinatnom sistemu tenzori su dati izrazima:



Slika 12

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix} \qquad T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix} \qquad (3.1)$$

Usled parnosti tangencijalnih napona i deformacija sledi da su tangencijalni naponi i deformacije sa istim indeksima jednaki, tj.:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx};\ \tau_{yz}=\tau_{zy};\ \tau_{xz}=\tau_{zx};\ \gamma_{xy}=\gamma_{yx};\ \gamma_{yz}=\gamma_{zy};\ \gamma_{xz}=\gamma_{zx} \qquad (3.2)$$

Tenzor napona i deformacija u cilindričnom koordinatnom sistemu glasi:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{Vmatrix} \qquad T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_\rho & \frac{1}{2}\gamma_{\rho\theta} & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\theta\rho} & \varepsilon_\theta & \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{z\rho} & \frac{1}{2}\gamma_{z\theta} & \varepsilon_z \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

Tenzori napona i deformacije u koordinatnom sistemu glavnih osa:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Vmatrix} \qquad T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Tenzor napona može se razložiti na sferični tenzor napona T_σ^S i devijator tenzora napona D_σ, tj.:

$$T_\sigma = T_\sigma^S + D_\sigma \tag{3.5}$$

Sferični tenzor napona T_σ^S odredjuje naponsko stanje svestranog pritiska, ili istezanja i izaziva isključivo promenu zapremine (pri elastičnoj deformaciji), a ne i promenu oblika. Ovaj tenzor definisan u matričnom obliku glasi:

$$T_\sigma^S = \begin{Vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{Vmatrix} = \delta_{ij}\cdot\sigma \tag{3.6}$$

gde su: $\sigma = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$ - srednji normalni napon i

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$ - simbol Kronecker-a.

Hidrostatički napon (pritisak) dat je izrazom:

$$p = -\sigma \tag{3.7}$$

Srednji normalni napon, ili hidrostatički pritisak, nema uticaja na nastupanje plastičnog stanja i nezavisan je od orijentacije površine, odnosno to je invarijantna veličina.

Devijator tenzora napona D_σ, koji karakteriše naponsko stanje promene oblika elementa napregnutog tela, može da se izrazi u matričnom obliku preko tenzora:

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x^* & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y^* & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma \end{Vmatrix} \tag{3.8}$$

Komponente napona u nagnutoj ravni su:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x\cdot\cos(n,x) + \tau_{xy}\cdot\cos(n,y) + \tau_{xz}\cdot\cos(n,z) \\ p_{ny} &= \tau_{yx}\cdot\cos(n,x) + \sigma_y\cdot\cos(n,y) + \tau_{yz}\cdot\cos(n.z) \\ p_{nz} &= \tau_{zx}\cdot\cos(n,x) + \tau_{zy}\cdot\cos(n,y) + \sigma_z\cdot\cos(n,z) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Normalni i tangencijalni naponi u nagnutoj ravni dati su izrazima:

$$\sigma_n = \sigma_x\cdot\cos^2(n,x) + \sigma_y\cdot\cos^2(n,y) + \sigma_z\cdot\cos^2(n,z) + 2\cdot\tau_{xy}\cdot\cos(n,x)\cos(n,y) + 2\cdot\tau_{yz}\cdot\cos(n,y)\cdot\cos(n,z) + 2\cdot\tau_{zx}\cdot\cos(n,z)\cdot\cos(n,x) \tag{310}$$

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2$$

Glavni normalni naponi se odredjuju iz kubne jednačine:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{3.11}$$

gde su: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \tag{3.12}$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\cdot\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

prva, druga i treća invarijanta tenzora napona.

Tenzor deformacije može da se razloži, isto kao i tenzor napona, na sferični i devijator tenzora deformacije, tj.:

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^S + D_\varepsilon \tag{3.13}$$

Sferični tenzor deformacije T_ε^S ima očigledan fizički smisao, jer odražava promenu zapremine elementa deformisanog tela, a u matričnom obliku glasi:

$$T_\varepsilon^S = \begin{Vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{Vmatrix} = \varepsilon\cdot\delta_{ij} \tag{3.14}$$

gde je: $\varepsilon = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}$ - srednja normalna deformacija.

Devijator tenzora deformacije D_ε karakteriše promenu oblika elementa deformisanog tela bez promene zapremine, a napisan u matričnom obliku glasi:

$$D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x^* & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y^* & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon \end{Vmatrix} \tag{3.15}$$

Veličine koje karakterišu male deformacije u pravougaonom koordinatnom sistemu, date su izrazima:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.16}$$

U cilindričnom koordinatnom sistemu te veličine su date izrazima:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} & \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{u_\theta}{\rho} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{z\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Diferencijalne jednačine ravnoteže za zapreminsko naponsko stanje u pavouglom koordinatnom sistemu glase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

pri čemu su zanemarene zapreminske sile.

Diferencijalne jednačine ravnoteže za zapreminsko naponsko stanje u cilindričnom koordinatnom sistemu glase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{2\cdot\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Za slučaj ravanskog naponskog stanja odgovarajuće diferencijalne jednačine ravnoteže se dobijaju kada se u izraze (3.18) i (3.19) zameni $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_{zy}=\tau_{yz}=\sigma_z=0$.

Maksimalni tangencijalni naponi i normalni naponi u ravnima maksimalnih tangencijalnih napona dati su izrazima:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} & \tau_{23} &= \pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} & \tau_{31} &= \pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \sigma_{23} &= \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \sigma_{31} &= \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Oktaedarski naponi su dati izrazima:

- normalni
$$\sigma_o = \sigma_n = \sigma \tag{3.21}$$

- tangencijalni
$$\tau_o = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \tag{3.22}$$

Maksimalne deformacije smicanja date su izrazima:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \qquad \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \tag{3.23}$$

Oktaedarska deformacija smicanja data je izrazom:

$$\gamma_o = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} \tag{3.24}$$

Glavni normalni naponi za slučaj ravanskog naponskog stanja odredjeni su izrazom:

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\cdot\tau_{xy}^2}$$

ZADACI

ZADATAK 3.1. U datoj tačni napregnutog tela zadate su sledeće vrednosti komponenata tenzora napona u proizvoljnom Dekart-ovom koordinatnom sistemu x, y, z. Odrediti za IV varijantu sledeće:

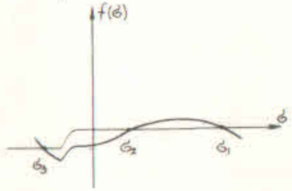
a) glavne normalne napone;
b) srednji normalni napon;
c) sferični tenzor napona;
d) devijator tenzora napona i
e) maksimalne tangencijalne napone.

Varijanta	I			II			III			IV			V		
Tenzor napona	5	10	10	10	5	0	4	10	10	11	-6	0	30	10	0
	10	15	0	-5	20	0	10	14	0	-6	20	0	10	20	0
	10	0	20	0	0	30	10	0	19	0	0	32	0	0	25

REŠENJE:

a) Glavni normalni naponi

Glavni normalni naponi nalaze se rešavanjem jedančine (3.11), ili grafički kako je prikazano na slici 13. Levi deo jednačine (3.11) može da se označi sa $f(\sigma)$ i da se konstruiše grafik te funkcije (sl. 13). Tačke preseka krive sa osom σ daju korene jednačine, odnosno glavne normalne napone.



Slika 13

Za IV varijantu ima se:

$I_1 = 11+20+32 = 63$

$I_2 = 11\cdot 20+20\cdot 32+32\cdot 11-(-6)^2 = 1176$

$I_3 = 11\cdot 20\cdot 32+2\cdot(-6)\cdot 0\cdot 0-11\cdot 0-20\cdot 0-32\cdot(-6)^2 = 5888$

Kubna jednačina glasi:

$$\sigma^3 - 63\cdot\sigma^2 + 1176\sigma - 5888 = 0$$

odnosno:

$$(\sigma-8)(\sigma^2-55\sigma+736) = 0$$

i njeni koreni su:

$$\sigma_1 = 32 \qquad \sigma_2 = 23 \qquad \sigma_3 = 8$$

Glavni normalni naponi za sve varijante iz zadatka dati su u tabeli:

Varijanta	I	II	III	IV	V
σ_1	27,2	30	26	32	36,2
σ_2	16,9	21,8	16,1	23	25
σ_3	4,3	8	-5,3	8	13,9

b) Srednji normalni napon iznosi:

$$\sigma = \frac{11+20+32}{3} = \frac{32+23+8}{3} = 21$$

c) Sferični tenzor napona glasi:

$$T_\sigma^S = \begin{Vmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{Vmatrix}$$

d) Devijator tenzora napona glasi:

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} -10 & -6 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{Vmatrix}$$

e) Maksimalni tangencijalni naponi su:

$$\tau_{12} = \frac{32-23}{2} = 4,5 \; ; \quad \tau_{23} = \frac{23-8}{2} = 7,5 \; ; \quad \tau_{31} = \frac{8-32}{2} = 12$$

ZADATAK 3.2. U nagnutoj ravni kroz tačku A sa normalom n(1/3, 2/3, 2/3) u koordinatnom sistemu osa x, y i z i tenzorom napona u toj tački

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} 30 & 8 & -6 \\ 8 & 20 & 15 \\ -6 & 15 & -10 \end{Vmatrix}$$

potrebno je odrediti sledeće:

a) normalni i tangencijalni napon;
b) projekcije ukupnog napona i ukupni napon;
c) glavne normalne napone;
d) kosinuse smerova glavnih pravaca;
e) sferični tenzor napona i devijator tenzora napona;

f) maksimalne tangencijalne napone i normalne napone u tim ravnima i

g) oktaedarski normalni i tangencijalni napon.

REŠENJE:

a) Normalni i tangencijalni napon iznose:

$$\sigma_n = 30(1/3)^2+20(2/3)^2+(-10)(2/3)^2+2\cdot 8(1/3)(2/3)+$$
$$+2\cdot 15(2/3)(2/3)+2(-6)(2/3)(1/3) = 22$$

$$\tau_n = \sqrt{p_u^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{28,39^2 - 22^2} = 17,94$$

b) Projekcije ukupnog napona i ukupni napon

$$p_{nx} = 30(1/3)+8(2/3)-6(2/3) = 11,33$$

$$p_{ny} = 8(1/3)+20(2/3)+15(2/3) = 26$$

$$p_{nz} = -6(1/3)+15(2/3)-10(2/3) = 1,33$$

$$p_u = \sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2} = \sqrt{11,33^2+26^2+1,33^2} = 28,39$$

c) Glavni normalni naponi

Invarijante tenzora napona su:

$$I_1 = 30 + 20 - 10 = 40$$

$$I_2 = 30\cdot 20 + 20(-10) + (-10)30 - 8^2 - 15^2 - (-6)^2 = -225$$

$$I_3 = 30\cdot 20(-10)+2\cdot 8\cdot 15(-6)+30\cdot 15^2+20(-6)^2+(-10)\cdot 8^2 = -14270$$

Kubna jednačina iz koje se odredjuju glavni normalni naponi glasi:

$$\sigma^3 - 40\cdot\sigma^2 - 225\cdot\sigma + 14270 = 0$$

Korišćenjem Horner-ovog postupka dobijaju se sledeća rešenja:

$$\sigma_1 = 34,566 \qquad \sigma_2 = 23,216 \qquad \sigma_3 = -17,782$$

Odredjivanjem vrednosti invarijanata tenzora napona preko glavnih normalnih napona, dobijaju se iste vrednosti kao i napred odredjene, što ukazuje da su normalni naponi dobro odredjeni.

d) Kosinusi smerova glavnih paravaca

Kosinusi smerova glavnih pravaca dobijaju se rešavanjem sistema jednačina:

$$(\sigma_x-\sigma)\cdot a_x + \tau_{xy}a_y + \tau_{xz}a_z = 0$$

$$\tau_{yx}a_x + (\sigma_y-\sigma)a_y + \tau_{yz}a_z = 0$$

$$\tau_{zx}a_x + \tau_{zy}a_y + (\sigma_z-\sigma)\cdot a_z = 0$$

Zamenom vrednosti za glavni normalni napon σ_1 dobija se:

$$-4,566a_x + 8a_y - 6a_z = 0$$

$$8a_x - 14,566a_y + 15a_z = 0$$

$$-6a_x + 15a_y - 44,566a_z = 0$$

Rešavanjem gornjeg sistema jednačina uz korišćenje dopunskog uslova:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

dobijaju se kosinusi pravca za normalni napon σ_1, i to:

$$a_x = 0,84488 \qquad a_y = 0,53097 \qquad a_z = 0,065$$

odnosno odgovarajući uglovi:

$$\alpha_x = 32,341^\circ \qquad \alpha_y = 57,928^\circ \qquad \alpha_z = 86,273^\circ$$

Zamenom i druga dva glavna normalna napona u početni sistem jednačina, dobijaju se vektori normala na površine u kojima dejstvuju glavni normalni naponi, i to:

napon σ_1: $\vec{n}_1 = 0,84488\vec{i} + 0,53097\vec{j} + 0,065\vec{k}$

napon σ_2: $\vec{n}_2 = -0,5039\vec{i} + 0,7494\vec{j} + 0,42944\vec{k}$

napon σ_3: $\vec{n}_3 = 0,17919\vec{i} - 0,3952\vec{j} + 0,90\vec{k}$

Ravni u kojima dejstvuju glavni normalni naponi moraju da budu medjusobno urpavne. Iz uslova da je skalarni proizvod vektora normala na ravan jednak nuli, proverava se upravnost tih ravnih, odnosno:

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0,84488(-0,5039)+0,5309\cdot 0,7494+0,065\cdot 0,42944 = 0,00008 \approx 0$$

$$\vec{n}_2\vec{n}_3 = (-0,5039)0,17919+0,7494(-0,3952)+0,42944\cdot 0,90 = 0,00004 \approx 0$$

$$\vec{n}_3\vec{n}_1 = 0,17919\cdot 0,84488-0,3952\cdot 0,53097+0,90\cdot 0,065 = 0,00005 \approx 0$$

e) Sferični tenzor napona i devijator tenzora napona

Srednji normalni napon iznosi:

$$\sigma = \frac{30+20-10}{3} = 13,33$$

Sferični tenzor napona glasi:

$$T_\sigma^s = \begin{Vmatrix} 13,33 & 0 & 0 \\ 0 & 13,33 & 0 \\ 0 & 0 & 13,33 \end{Vmatrix}$$

Devijator tenzora napona glasi:

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} 16,67 & 8 & -6 \\ 8 & 6,67 & 15 \\ -6 & 15 & -23,33 \end{Vmatrix}$$

f) Maksimalni tangencijalni i normalni naponi u tim ravnima

Maksimalni tangencijalni naponi iznose:

$$\tau_{12} = \pm \frac{34,566-23,216}{2} = \pm 5,675 \qquad \tau_{23} = \frac{\pm 23,216+17,782}{2} = \pm 20,499$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{-17,782-34,566}{2} = \mp 26,174$$

Normalni naponi u ravnima dejstva glavnih tangencijalnih napona:

$$\sigma_{12} = \frac{34,566+23,216}{2} = 28,891 \qquad \sigma_{23} = \frac{23,216-17,782}{2} = 2,717$$

$$\sigma_{31} = \frac{-17,782+34,566}{2} = 8,392$$

g) Oktaedarski normalni i tangencijalni napon

$$\sigma_o = \sigma = 13,33$$

$$\tau_o = \frac{2}{3}\sqrt{5,675^2 + 20,499^2 + (-26,174)^2} = 22,484$$

Odnos oktaedarskog tangencijalnog napona i maksimalnog tangencijalnog napona iznosi:

$$\frac{\tau_o}{\tau_{max}} = \frac{22,484}{26,174} = 0,859$$

a što je u granicama u kojima ovaj odnos treba da se nalazi, tj.:

$$0,941 > \frac{\tau_o}{\tau_{max}} > 0,816$$

ZADATAK 3.3. Poznat je tenzor napona u nekoj tački napregnutog tela:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{Vmatrix}$$

Potrebno je odrediti:

a) normalni σ_n i tangencijalni napon τ_n u nagnutoj ravni čija normala sa koordinatnim osama gradi uglove, čiji su kosinusi smerova: $a_x=\cos(n,x)=1/\sqrt{3}$; $a_y=\cos(n,y)=1/\sqrt{2}$; $a_z=\cos(n,z)=1/\sqrt{6}$ i

b) veličinu hidrostatičkog pritiska za zadati tenzor napona.

REŠENJE:

a) Normalni i tangencijalni napon

Projekcije ukupnog napona p_u na koordinatne ose (3.9) su:

$$p_x = \sigma_x \cdot a_x + \tau_{xy} \cdot a_y + \tau_{xz} \cdot a_z = 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 24,39$$

$$p_y = \tau_{yx} \cdot a_x + \sigma_y \cdot a_y + \tau_{yz} \cdot a_z = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 19,91$$

$$p_z = \tau_{zx} \cdot a_x + \tau_{zy} \cdot a_y + \sigma_z \cdot a_z = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 25 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 10,20$$

Normalni napon je:

$$\sigma_n = p_x \cdot a_x + p_y \cdot a_y + p_z \cdot a_z = 24,39 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 19,91 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 10,20 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 32,32$$

Ukupni napon p_u u nagnutoj ravni iznosi:

$$p_u = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 24,39^2 + 19,91^2 + 10,20^2 = 33,09$$

Tangencijalni napon u posmatranoj tački za ravan sa normalom $\vec{n}$ iznosi:

$$\tau_n = \sqrt{p_u - \sigma_n} = \sqrt{33,09^2 - 32,32^2} = 7,09$$

b) Hidrostatički pritisak

$$p = -\sigma = -\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = -\frac{30+20+25}{3} = -25$$

ZADATAK 3.4. Cilindar početnog prečnika Ø20 mm i visine h_o= 50 mm sabija se do krajnje visine h=20 mm. Za slučaj linearnog naponskog stanja odrediti:

a) srednju normalnu deformaciju;
b) oktaedarsku deformaciju smicanja;
c) intenzivnost tangencijalne deformacije;
d) intenzivnost deformacije;
e) glavne normalne deformacije i
f) pokazati da važe odnosi

$$\gamma_o=(0,816-0,941)\cdot|\gamma|_{max}$$
$$\gamma_i=(1-1,155)\cdot|\gamma|_{max}$$
$$\varepsilon_i=(1-1,155)\cdot|\varepsilon|_{max}$$

REŠENJE:

a) Srednji normalni napon

Relativna deformacija sabijanja po visini elementa je:

$$\varepsilon_3 = \frac{20-50}{50} = -0,6$$

Druge dve deformacije, po uslovu konstantnosti zapremine, su jednake polovini najveće deformacije i iznose:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0,5\cdot\varepsilon_3 = 0,3$$

Srednja normalna deformacija iznosi:

$$\varepsilon = \varepsilon_o = \frac{0,3+0,3-0,6}{3} = 0$$

U ovom slučaju se sferični tenzor napona javlja nultim tenzorom, a tenzor deformacije je jednak devijatoru tenzora deformacije.

b) Oktaedarska deformacija smicanja iznosi:

$$\gamma_o = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(0,3-0,3)^2+(0,3+0,6)^2+(-0,6-0,3)^2} = 0,8485$$

c) Intenzivnost tangencijalne deformacije iznosi:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{(0,3-0,3)^2+(0,3+0,6)^2+(-0,6-0,3)^2} = 1,039$$

d) Intenzivnost deformacije iznosi:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{(0,3-0,3)^2+(0,3+0,6)^2(-0,6-0,3)^2} = 0,6$$

e) Glavne tangencijalne deformacije iznose:

$$\gamma_{12} = 0,3 - 0,3 = 0$$
$$\gamma_{23} = 0,3 + 0,6 = 0,9$$
$$\gamma_{31} = -0,6 - 0,3 = -0,9$$

f) Odnosi izmedju pojedinih veličina su:

$$\gamma_o/|\gamma|_{max} = 0,8485/0,9 = 0,941$$

$$\gamma_i/|\gamma|_{max} = 1,039/0,9 = 1,155$$

$$\varepsilon_i/|\varepsilon|_{max} = 0,6/0,6 = 1$$

Dobijene vrednosti odnosa pojedinih vrednosti deformacija pokazuju da važe odnosi dati zadatkom.

ZADATAK 3.5. Za vrednosti logaritamskih deformacija odredjenih u zadatku 2.4. odrediti:

a) oktaedarsku deformaciju smicanja;

b) intenzivnost tangencijalne deformacije;

c) intenzivnost deformacije i

d) pokazati da važe odnosi izmedju deformacija dati u predhodnom zadatku.

REŠENJE:

a) Oktaedarska deformacija smicanja, izražena preko glavnih logaritamskih deformacija, je:

$$\gamma_o = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(0,875+0,693)^2+(-0,693+0,182)^2+(-0,182-0,875)^2} = 1,305$$

b) Intenzivnost tangencijalne deformacije iznosi:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{(0,875+0,693)^2+(-0,693+0,182)^2+(-0,182-0,875)^2} = 1,599$$

c) Intenzivnost deformacije iznosi:

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{(0,875+0,693)^2+(-0,693+0,182)^2+(-0,182-0,875)^2} = 0,923$$

d) Odnosi izmedju deformacija

Glavne normalne deformacije iznose:

$$\gamma_{12} = 0,875 + 0,693 = 1,568$$

$$\gamma_{23} = -0,693 + 0,182 = -0,511$$

$$\gamma_{31} = -0,182 - 0,875 = -1,057$$

Odnosi izmedju pojedinih veličina deformacija iznose:

$$\gamma_o/|\gamma|_{max} = 1,305/1,568 = 0,832$$

$$\gamma_i/|\gamma|_{max} = 1,599/1,568 = 1,019$$

$$\varphi_i/|\varphi|_{max} = 0,923/0,875 = 1,054$$

Dobijene vrednosti zadovoljavaju odnose koji važe za te veličine.

4. USLOVI PLASTIČNOSTI

4.1. ENERGETSKI USLOV PLASTIČNOSTI

Bilo koja čestica metalnog tela, pri odgovarajućim temperatursko brzinskim uslovima i pri odgovarajućem stepenu deformacije, prelazi iz elastičnog u plastično stanje, kada intenzivnost napona dostigne veličinu jednaku specifičnom deformacionom otporu pri linearnom naponskom stanju, tj. kada je ispunjeno da je:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} = K \qquad (4.1)$$

Energetski uslov plastičnosti može da se izrazi i preko oktaedarskog tangencijalnog napona, ili preko intenzivnosti tangencijalnog napona:

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot K \qquad (4.2)$$

odnosno:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot K \qquad (4.2a)$$

Iz gornjih izraza sledi da pri plastičnom stanju oktaedarski tangencijalni napon τ_o, intenzivnost tangencijalnog napona τ_i i intenzivnost napona σ_i imaju odredjene vrednosti.

Energetski uslov plastičnosti izražen preko maksimalnih tangencijalnih napona glasi:

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = 0,5\cdot K^2 \qquad (4.3)$$

Energetski uslov plastičnosti u koordinatnom sistemu proizvoljnih osa glasi:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2) = 2K^2 \quad (4.4)$$

Po energetskom uslovu plastičnosti potencijalna energija promene oblika elastičnog deformisanja pri plastičnom deformisanju je konstantna veličina:

$$W_o = \frac{1+\mu_p}{6E} \cdot 2 \cdot K = \text{const.} \quad (4.5)$$

tj. količina specifične potencijalne energije elastične deformacije oblika elementa metalnog tela pri njegovom plastičnom deformisanju, za date uslove deformisanja (stepen, brzina i temperatura deformacije), je konstantna veličina nezavisna od sheme naponskog stanja.

4.2. USLOV PLASTIČNOSTI KONSTANTNOSTI MAKSIMALNOG TANGENCIJALNOG NAPONA

Ovaj uslov plastičnosti naziva se i uslov plastičnosti Treska-Saint-Venan, po imenima naučnika koju su ga otkrili i formulisali, a isti može da se napiše u obliku:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm K \qquad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm K \qquad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm K \quad (4.6)$$

odnosno:

$$\tau_{12} = \pm 0,5K \qquad \tau_{23} = \pm 0,5K \qquad \tau_{31} = \pm 0,5K \quad (4.6a)$$

tj. plastično stanje nastupa i održava se ako jedna od razlika dva glavna normalna napona postaje ravna specifičnom deformacionom otporu, nezavisno od vrednosti druge dve, tj. nezavisno od veličine srednjeg glavnog normalnog napona.

Uvodjenjem promenljivog koeficijenta β, uslov plastičnosti koji bazira na konstantnosti tangencijalnog napona, približava se uslovu plastičnosti koji bazira na konstantnosti intenziteta tangencijalnog napona (energetski uslov), pa se može napisati:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \pm \beta \cdot K \quad (4.7)$$

gde su: $\beta = 2/\sqrt{1+n_\sigma^2}$ promenljivi koeficijent i

$n_\sigma = (2\cdot\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)$ koeficijent vida naponskog stanja

4.3. VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA PRI PLASTIČNOM DEFORMISANJU

Po deformacionoj teoriji plastičnosti, koja daje vezu izmedju komponenata napona i komponenata deformacija u konačnom odnosu, jednačine veza glase:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_1-0,5(\sigma_2+\sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_2-0,5(\sigma_3+\sigma_1)] \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_3-0,5(\sigma_1+\sigma_2)]$$

Veza izmedju napona i deformacija pri plastičnom deformisanju može da se da i preko izraza:

$$\sigma_1-\sigma = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\varepsilon_1 \;;\quad \sigma_2-\sigma = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\varepsilon_2 \;;\quad \sigma_3-\sigma = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\varepsilon_3 \quad (4.9)$$

odnosno, korišćenjem koeficijenta naponskog i deformacionog stanja:

$$n_\sigma = n_\varepsilon \quad (4.10)$$

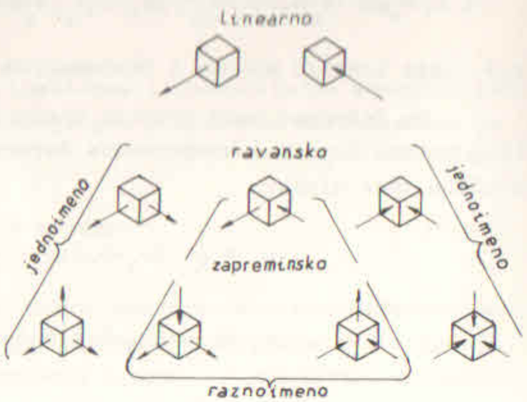
gde je: $n_\varepsilon = (2\cdot\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$

Za slučaj ravanskog naponskog stanja, jednačine deformacione teorije plastičnosti su:

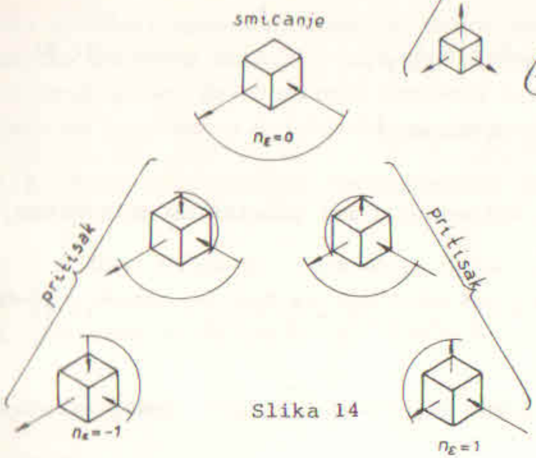
$$\boxed{\sigma_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot(2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_2) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot(2\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_1)} \quad (4.11)$$

4.4. MAHANIČKE SHEME DEFORMACIJE

Mehaničke sheme deformacije za datu elementarnu zapreminu daju predstavu o prisustvu i znaku glavnih napona i glavnih deformacija. One predstavljaju sveukupnost sheme glavnih napona i sheme glavnih deformacija. Na slici 14 prikazane su sheme glavnih deformacija a na slici 15 sheme glavnih napona. Ukupno postoje 23 mehaničke sheme deformacije.



Slika 15



Slika 14

ZADACI I PRIMERI

ZADATAK 4.1. Glavni normalni naponi u nekoj tački napregnutog tela su: $\sigma_1=120$ N/mm^2; $\sigma_2=90$ N/mm^2 i $\sigma_3=-150$ N/mm^2.

Može li materijal,sa specifičnim deformacionim otporom K=240 N/mm^2,da se nalazi u elastičnom stanju?

REŠENJE:

Intenzivnost napona iznosi:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(120-90)^2 + (90+150)^2 + (-150-120)^2} = 256,32 \text{ N/mm}^2$$

Intenzivnost napona je veća od vrednosti specifičnog deformacionog otpora materijala (256,32>240), pa materijal ne može da se nalazi u elastičnom stanju, već samo u plastičnom stanju.

Korišćenjem uslova plastičnosti kontantnosti maksimalnog tangencijalnog napona dolazi se do istog zaključka, pošto je:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = 120 + 150 = 270 \text{ N/mm}^2 > 240 \text{ N/mm}^2$$

ZADATAK 4.2. Glavni normalni naponi u datoj tački tela su: $\sigma_1=30$ N/mm^2; $\sigma_2=-10$ N/mm^2 i $\sigma_3=-20$ N/mm^2. Potrebno je odrediti:

a) vrednost specifičnog deformacionog otpora K tako da se materijal nalazi u plastičnom stanju;
b) promenljivi koeficijent β i
c) koeficijente vida naponskog i deformacionog stanja.

Odrediti vrednosti traženih veličina i za slučaj ravanskog naponskog stanja, tj. kada je $\sigma_1=0$.

REŠENJE:

a) Vrednost specifičnog deformacionog otpora

Po uslovu konstantnosti intenzivnosti napona, za date uslove se dobija:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(30+10)^2 + (-10+20)^2 + (-20-30)^2} = 45,82 \text{ N/mm}^2$$

Da bi se materijal nalazio u plastičnom stanju potrebno je da vrednost specifičnog deformacionog otpora materijala bude K<45,82 N/mm^2.

Po uslovu plastičnosti konstantnosti maksimalnog tangencijalnog napona, dobija se:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = 30 + 20 = 50 \text{ N/mm}^2$$

odnosno, da bi se materijal nalazio u plastičnom stanju potrebno je da vrednost specifičnog deformacionog otpora materijala bude K<50 N/mm^2.

Za slučaj ravanskog naponskog stanja ($\sigma_1=0$), po energetskom uslovu plastičnosti se ima:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(0+10)^2 + (-10+20)^2 + (-20-0)^2} = 17,32 \text{ N/mm}^2$$

odnosno, po uslovu plastičnosti konstantnosti maksimalnog tangencijalnog napona:

$$\sigma_3 = \pm K = 20 \text{ N/mm}^2$$

Da bi se materijal nalazio u plastičnom stanju potrebno je da vrednost specifičnog deformacionog otpora bude $K<17,32$ N/mm^2, odnosno $K<20$ N/mm^2.

b) Promenljivi koeficijent β

Iz uprošćenog uslova plastičnosti može da se odredi promenljivi koeficijent β:

$$\beta = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_i} = \frac{30 + 20}{45,82} = 1,091$$

čija vrednost zadovoljava uslov da je: $1<\beta<1,155$.

Vrednost promenljivog koeficijenta β za slučaj ravanskog naponskog stanja je:

$$\beta = -\sigma_3/\sigma_i = 20/17,32 = 1,155$$

Kada je vrednost promenljivog koeficijenta $\beta= 1,155$, znači da u materijalu vlada ravansko deformaciono stanje. Tada mora biti:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{0 - 20}{2} = -10 \text{ N/mm}^2$$

što je i zadovoljeno, pa se u materijalu javlja i ravansko naponsko stanje ($\sigma_1=0$) i ravansko deformaciono stanje ($\varepsilon_2=0$).

c)Koeficijenti vida naponskog i deformacionog stanja

Za slučaj prostornog naponskog stanja, koeficijent vida naponskog stanja iznosi:

$$n_\sigma = \frac{2\cdot\sigma_{sr}-\sigma_{max}-\sigma_{min}}{\sigma_{max}-\sigma_{min}} = \frac{2(-10)-30+20}{30+20} = -0,6$$

Iz jednačina veze napona i deformacija sledi da je $n_\sigma=n_\varepsilon=-0,6$. Za vrednosti $n_\varepsilon<0$ znači da u materijalu vlada osnovno stanje istezanja, tj. jedna deformacija je pozitivna, a druge dve su negativne.

Za slučaj ravanskog deformacionog stanja dobija se:

$$n_\sigma = n_\varepsilon = \frac{2(-10)-0+20}{0-20} = 0$$

Dobijena vrednost koeficijenta vida deformacionog stanja potvrdjuje da se u materijalu javlja i ravansko deformaciono stanje.

Vrednost pomenljivog koeficijenta β može da se izračuna i preko koeficijenta vida naponskog stanja. Za slučaj prostornog naponskog stanja β je:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3+n_\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3+(-0,6)^2}} = 1,091$$

odnosno, za slučaj ravanskog naponskog stanja:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3+0^2}} = 1,155$$

Vidi se da su dobijene iste vrednosti za promenljivi koeficijent β.

ZADATAK 4.3. Glavni normalni naponi u datoj tački predmeta rada izradjenog od olova su: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-60$ N/mm^2. Ako je specifični deformacioni otpor olova,za date uslove deformisanja, $K=40$ N/mm^2, odrediti u kakvom se stanju nalazi olovo.

REŠENJE:

Pri svestranom ravnomernom pritisku postoji samo sferični tenzor napona, koji može da izazove samo promenu zapremine u oblasti elastičnih deformacija, dok je devijator tenzora napona jednak nuli, pa nema promene oblika, odnosno metal se nalazi u elastičnom stanju.

Provera gornjih tvrdnji može da se izvrši odredjivanjem vrednosti intenzivnosti napona, odnosno maksimalnih tangencijalnih napona:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-60+60)^2 + (-60+60)^2 + (-60+60)^2} = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -60+60 = 0 \quad ; \quad \sigma_2 - \sigma_3 = -60+60 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 - \sigma_1 = -60+60 = 0$$

Dobijene vrednosti ukazuju takodje na to da se materijal nalazi u elastičnom stanju.

ZADATAK 4.4. U nagnutoj ravni kroz tačku A sa normalom $\vec{n}(1/3, 2/3, 2/3)$ poznat je tenzor napona:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} 30 & 8 & -6 \\ 8 & 20 & 15 \\ -6 & 15 & -10 \end{Vmatrix}$$

Ako materijal predmeta rada očvršćava po zakonu:

$$K = 38(1+\varepsilon)$$

potrebno je odrediti:

a) veličinu stepena deformacije pri kojoj se materijal nalazi u plastičnom stanju;
b) koeficijent vida naponskog i deformacionog stanja i
c) vrednost promenljivog koeficijenta β.

REŠENJE:

a) Deformacija pri kojoj materijal prelazi u plastično stanje

Intenzivnost napona iznosi:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(30-20)^2 + (20+10)^2 + (-10-30)^2 + 6(8^2+6^2+15^2)} = 47,69$$

Uslov da se materijal nalazi u plastičnom stanju glasi:

$$\sigma_i \geq K$$

Iz gornjeg izraza se dobija vrednost specifičnog deformacionog otpora pri kojoj se materijal nalazi u plastičnom stanju:

$$\varepsilon \leq \sigma_i/38 - 1 = 47,69/38 - 1 = 0,225$$

Glavni normalni naponi za tenzor napona dat u ovom zadatku odredjeni su u zadatku 3.2. Intenzivnost napona izračunata preko glavnih normalnih napona iznosi:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(34,566-23,216)^2+(23,216+17,782)^2+(-17,782-34,566)^2} = 47,69$$

Vidi se da je dobijena ista vrednost za σ_i.

b) Koeficijenti vida naponskog i deformacionog stanja su:

$$n_\sigma = n_\varepsilon = \frac{2\cdot 23,216-34,566+17,782}{34,566+17,782} = 0,566$$

Dobijena vrednost za n_ε ukazuje da se javlja slučaj deformacionog stanja pritiska.

Osnovno deformaciono stanje koje vlada u materijalu može da se odredi i preko komponenata devijatora tenzora napona, čije su normalne komponente:

$$\sigma_x^* = \sigma_x - \sigma = 30 - 13,33 = 16,67$$
$$\sigma_y^* = \sigma_y - \sigma = 20 - 13,33 = 6,67$$
$$\sigma_z^* = \sigma_z - \sigma = -10 - 13,33 = -23,33$$

Suma normalnih komponenata devijatora tenzora napona jednaka je nuli, tj.:

$$\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^* = 16,67 + 6,67 - 23,33 = 0$$

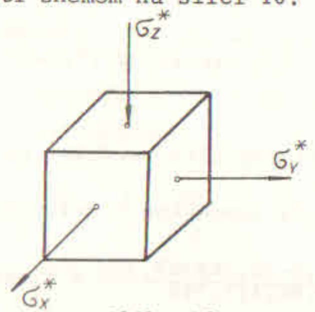
kao i suma logaritamskih deformacija pri plastičnom deformisanju:

$$\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z = 0$$

Prema tome, postoji analogija izmedju normalnih deformacija i normalnih komponenata devijatora tenzora napona, tj. jedna od komponenata napona jednaka je po apsolutnoj vrednosti drugim dvema, a suprotnog je znaka:

$$\sigma_z^* = -(\sigma_x^* + \sigma_y^*)$$

što se može predstaviti shemom na slici 16.



Slika 16

Pošto postoji analogija izmedju normalnih deformacija i sheme normalnih komponenti devijatora tenzora napona, sledi da se u materijalu javlja jedna negativna deformacija, a druge dve pozitivne, tj. javlja se deformacija pritiska, kako je i napred pokazano.

c) Vrednost promenljivog koeficijenta β iznosi:

$$\beta = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{K} = \frac{34,566 + 17,782}{47,69} = 1,097$$

ili preko izraza:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + n_\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3 + 0,566^2}} = 1,097$$

ZADATAK 4.5. Odrediti približne uslove plastičnosti za osnosimetrično naponsko stanje i za ravansko deformaciono stanje.

REŠENJE:

Uslovi plastičnosti za osnosimetrično naponsko stanje (pri $\sigma_\rho = \sigma_\theta$) i za ravansko deformaciono stanje u proizvoljnom ortogonalnom koordinatnom sistemu:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\cdot\tau_{\rho z}^2 = K^2 \quad \text{za osnosimetrično naponsko stanje i}$$

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\cdot\tau_{xz}^2 = K^2 \quad \text{za ravansko deformaciono stanje.}$$

Neka se diferencira prva jednačina po ρ, a druga po x:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)\left(\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial\rho}\right) + 3\cdot\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_z)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) + 4\cdot\tau_{xz}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

Ako tangencijalni napon ne zavisi od ρ ili x (naprimer ako je konstantan, ili se menja parametarski) to izvod tangencijalnog napona po tim koordinatama postaje jednak nuli. Računajući da normalni naponi u opštem slučaju nisu jednaki nuli, dobija se:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial\rho} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial x} = 0$$

odnosno:

$\partial\sigma_\rho = \partial\sigma_z$ uprošćen uslov plastičnosti za osnosimetrnično naponsko stanje (približan uslov plastičnosti) i

$\partial\sigma_x = \partial\sigma_z$ uprošćen uslov plastičnosti za ravansko deformaciono stanje.

ZADATAK 4.6. Napisati jednačinu plastičnosti po energetskom uslovu plastičnosti za slučaj ravanskog naponskog stanja ($\sigma_2=0$) i dati geometrijsku interpretaciju.

REŠENJE:

Energetski uslov plastičnosti definisan je izrazom:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} = K$$

za slučaj ravanskog naponskog stanja prethodni izraz glasi:

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = K^2$$

Gornja jednačina predstavlja krivu drugog reda, čiji opšti oblik glasi:

$$Ax^2 + 2\cdot Bxy + Cy^2 + 2\cdot Dx + 2\cdot Ey + F = 0$$

Centar krive drugog reda:

$$\delta = A\cdot C - B^2 = 1\cdot 1 - (-1/2)^2 = 3/4 \neq 0$$

postoji pošto je $\delta \neq 0$, a koordinate centra krive su:

$$x_c = \frac{CD-BE}{AC-B^2} = \frac{1\cdot 0-(-1/2)\cdot 0}{3/4} = 0 \quad ; \quad y_c = \frac{AE-BD}{AC-B^2} = \frac{1\cdot 0-(-1/2)\cdot 0}{3/4} = 0$$

Rotacijom se kriva drugog reda svodi na oblik:

$$s_1 \cdot x'^2 + s_2 \cdot y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Ugao rotacije krive iznosi:

$$tg2\alpha = \frac{2\cdot B}{A - C} = \frac{2(-1/2)}{1 - 1} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha = \pi/4$$

Vrednosti za s_1 i s_2 dobijaju se iz jednačine:

$$s^2 - (A + C)\cdot s + \delta = 0$$

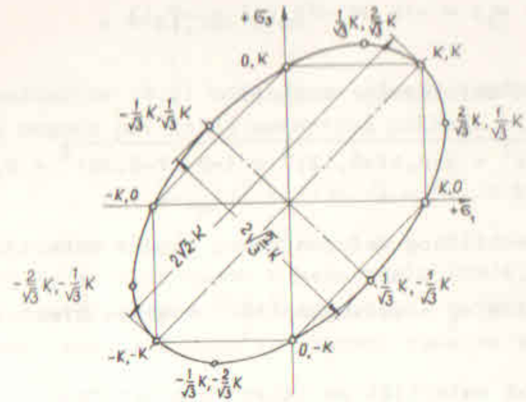
gde je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}\cdot K^2$$

Konačno, zamenom odgovarajućih veličina, dobija se izraz za uslov plastičnosti pri ravanskom naponskom stanju u koordinatnom sistemu, koji je zarotiran oko centra za $\alpha=\pi/4$, u obliku:

$$\frac{\sigma_1'^2}{2} + \frac{\sigma_3'^2}{2/3} = K^2$$

Graničnom konturom plastičnosti za ravansko naponsko stanje se, prema tome, javlja elipsa (sl.17), koja je zarotirana oko centra za ugao $\alpha=\pi/4$ i ima ose elipse sa vrednostima $(2\sqrt{2}\cdot K;\ 2\sqrt{2/3}\cdot K)$.



Slika 17

ZADATAK 4.7. U nekoj tački napregnutog tela poznati su glavni normalni naponi: $\sigma_1=400$ N/mm^2; $\sigma_2=150$ N/mm^2 i $\sigma_3=-200$ N/mm^2. U toj istoj tački su odredjene i dve glavne logaritamske deformacije, i to: $\varphi_1=0,36$ i $\varphi_2=-0,24$.

Ako je za materijal predmeta rada poznata zavisnost intenzivnosti napona od intenzivnosti deformacije u obliku:

$$K = \sigma_i = 624\cdot\varphi_i^{0,236} \quad \text{N/mm}^2$$

potrebno je odrediti:

a) u kakvom se stanju nalazi materijal u datoj tački;
b) koeficijent vida naponskog stanja i
c) vrednost promenljivog koeficijenta β.

REŠENJE:

a) Stanje u kome se nalazi materijal

Intenzivnost napona u zadatoj tački iznosi:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400-150)^2 + (150+200)^2 + (-200-400)^2} = 522\ N/mm^2$$

Iz uslova konstantnosti zapremine dobija se:

$$\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2) = -(0,36 - 0,24) = -0,12$$

Intenzivnost deformacije iznosi:

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(0,36+0,24)^2 + (-0,24+0,12)^2 + (-0,12-0,36)^2} = 0,366$$

Vrednost specifičnog deformacionog otpora materijala iznosi:

$$K = \sigma_i = 624 \cdot 0,366^{0,236} = 492,4\ N/mm^2$$

Pošto je $\sigma_i > K$ materijal se nalazi u plastičnom stanju.

b) Koeficijent vida naponskog stanja iznosi:

$$n_\sigma = \frac{2 \cdot 150-400+200}{400+200} = 0,166$$

što znači da u materijalu vlada deformacija pritiska.

c) Vrednost promenljivog koeficijenta β je:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3+0,166^2}} = 1,149$$

ZADATAK 4.8. U nekoj tački napregnutog tela, koje se nalazi u ravanskom deformacionom stanju, odredjen je oktaedarski tangencijalni napon, a njegova vrednost je τ_o=35 N/mm^2. Predmet rada je od ugljeničnog čelika sa 0,5%C, a obradjuje se na temperaturi t=1050^{o}C. Srednja brzina deformacije je $\dot{\varphi}_{sr}$=0,085 s^{-1}, a stepen deformacije je ε=0,3.

Korišćenjem energetskog uslova plastičnosti pokazati u kakvom stanju se nalazi predmet rada u datoj tački (elastično ili plastično)?

REŠENJE:

Vrednost specifičnog deformacionog otpora za dati materijal i uslove obrade odredjena je u ZADATKU 2.10. i iznosi:

$$K = 64,345\ N/mm^2$$

Iz jednačine (4.2) može da se odredi vrednost specifičnog deformacionog otpora pri kojoj materijal prelazi u plastično stanje:

$$K = 3 \cdot \tau_o/\sqrt{2} = 3 \cdot 35/\sqrt{2} = 74,24\ N/mm^2$$

Pošto je stvarni napon u materijalu (K=74,24 N/mm^2) veći od vrednosti specifičnog deformacionog otpora materijala pri datim uslovima obrade (K=64,345 N/mm^2), predmet rada se nalazi u plastičnom stanju.

ZADATAK 4.9. Za slučaj ravanskog naponskog stanja (σ_3=0) koje vlada u jednoj tački napregnutog tela, a koje se nalazi u plastičnom stanju, izmerene su dve glavne normalne deformacije metodom koordinatnih mreža. Vrednosti tih deformacija su: φ_1=-0,43 i φ_2 = 0,52.

Za materijal od koga se izradjuje predmet rada poznata je kriva očvršćavanja u obliku:

$$K = 662,8 \cdot \varphi_i^{0,25}\ N/mm^2$$

Potrebno je odrediti:

a) intenzivnost napona σ_i;
b) glavne normalne napone;
c) intenzivnost tangencijalnih napona τ_i;
d) devijator tenzora napona;
e) drugu invarijantu devijatora tenzora napona $I_2(D_\sigma)$;
f) koeficijent vida naponskog i deformacionog stanja, kao i osnovno deformaciono stanje koje se javlja u materijalu i

g) promenljivi koeficijent β.

REŠENJE:

a) Intenzivnost napona odredjuje se iz uslova plastičnosti. U tom izrazu se javlja vrednost specifičnog deformacionog otpora, koja je pak u funkciji intenzivnosti deformacije. Zato je potrebno da se najpre odredi deformacija φ_3, i ona iznosi:

$$\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2) = -(-0,43 + 0,52) = -0,09$$

Intenzivnost deformacije iznosi:

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(-0,43+0,52)^2 + (0,52+0,09)^2 + (-0,09+0,43)^2} = 0,555$$

Intenzivnost napona iznosi:

$$\sigma_i = 662,8 \cdot 0,555^{0,25} = 572,2\ \text{N/mm}^2$$

b) Glavni normalni naponi

Glavni normalni naponi se odredjuju iz jednačina veza napona i deformacija. Za ravansko naponsko stanje ima se:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varphi_i}(2\cdot\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{572,2}{0,555}\cdot[2(-0,43)+0,52] = -233,35\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varphi_i}(2\cdot\varphi_2 + \varphi_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{572,2}{0,555}\cdot(2\cdot 0,52-0,43) = 418,66\ \text{N/mm}^2$$

Provera uslova plastičnosti:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-233,35-418,66)^2 + (418,66-0)^2 + (0+233,35)^2} = 572,2\ \text{N/mm}^2$$

c) Intenzivnost tangencijalnog napona:

$$\tau_i = \sigma_i/\sqrt{3} = 572,2/\sqrt{3} = 330,5\ \text{N/mm}^2$$

d) Devijator tenzora napona

Za odredjivanje devijatora tenzora napona potrebno je odrediti srednji normalni napon:

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{233,35+418,66+0}{3} = 61,77\ \text{N/mm}^2$$

Devijator tenzora napona glasi:

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} -295,12 & 0 & 0 \\ 0 & 356,89 & 0 \\ 0 & 0 & -61,77 \end{Vmatrix}$$

e) Druga invarijanta devijatora tenzora napona iznosi:

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6}[(-233,35-418,66)^2+(418,66-0)^2+(0+233,35)^2] = -109141$$

f) Koeficijenti vida naponskog i deformacionog stanja su:

$$n_\sigma = n_\varepsilon = \frac{2\cdot\sigma_{sr}-\sigma_{max}-\sigma_{min}}{\sigma_{max}-\sigma_{min}} = \frac{2\cdot 0-418,66+233,35}{418,66+233,35} = -0,2842$$

Za vrednosti koeficijenta vida deformacionog stanja $-1<n_\varepsilon<0$, u materijalu vlada deformacija istezanja, tj. dve deformacije su negativne, a jedna je pozitivna.

g) Promenljivi koeficijent β

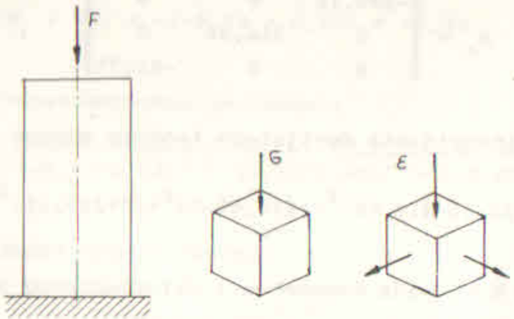
$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3+n^2}} = \frac{2}{\sqrt{3+(-0,2842)^2}} = 1,139$$

ZADATAK 4.10. Dati mehaničke sheme deformacije za sledeće postupke obrade materijala deformisanjem, i to:

a) sabijanje bez kontaktnog trenja (prizme ili cilindra);
b) sabijanje sa kontaktnim trenjem (prizme ili cilindra);
c) istosmerno istiskivanje punih komada;
d) vučenje i
e) izvlačenje bez stanjenja debljine zida i to za venac elementa.

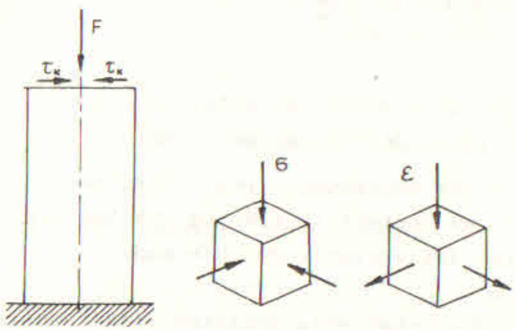
REŠENJE:

a) Pri sabijanju cilindra ili prizme bez kontaktnog trenja, u materijalu se javlja linearno naponsko stanje. Jedna deformacija je negativna, i po apsolutnoj vrednosti je jednaka sumi druge dve deformacije, koje su pozitivne. Mehanička shema deformacije za ovu vrstu obrade deformisanjem prikazana je na slci 18.



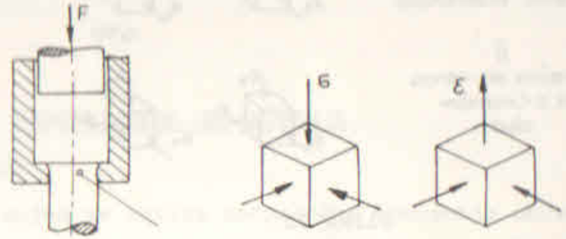
Slika 18

b) Pri sabijanju prizme ili cilindra sa kontaktnim trenjem, u materijalu se javlja shema svestranog pritiska sa različitim vrednostima napona. U slučaju prostog pritiska, naponi pritiska u radijalnom i tangencijalnom pravcu su jednaki. Shema deformacionog stanja je ista kao i u slučaju sabijanja bez kontaktnog trenja. Mehanička shema deformacije prikazana je na slici 19.



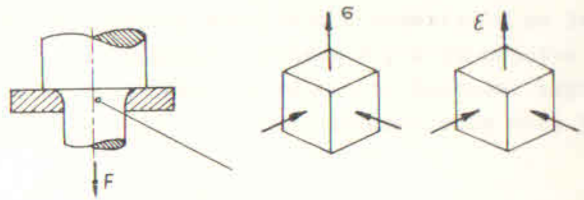
Slika 19

c) Pri istosmernom istiskivanju punih komada u materijalu se javlja shema svestranog pritiska sa najmanjom vrednosti napona (apsolutni iznos) u pravcu najveće deformacije. Shema deformacionog stanja se karakteriše jednom pozitivnom deformacijom i dvema negativnim, čija je suma apsolutnih vrednosti jednaka vrednosti pozitivne deformacije. Mehanička shema deformacije prikazana je na slici 20.



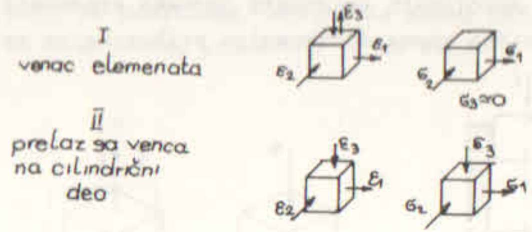
Slika 20

d) Pri vučenju se javlja ista shema deformacionog stanja, kao i pri istosmernom istiskivanju punih komada. Naponska shema se pak karakteriše jednim pozitivnim normalnim naponom u pravcu najveće deformacije i sa dva negativna normalna napona u pravcu negativnih deformacija. Mehanička shema deformacije prikazana je na slici 21.



Slika 21

e) Pri izvlačenju elemenata od lima na vencu elementa se javlja prostorna shema naponskog stanja, pri čemu su naponi u normalnom i tangencijalnom pravcu negativni (napon u normalnom pravcu može da se zanemari zbog male vrednosti), dok je normalni napon u radijalnom pravcu pozitivan. Deformacija u radijalnom pravcu je takodje pozitivna, a u tangencijalnom pravcu je negativna, dok u normalnom pravcu, zavisno od položaja na vencu, može da bude pozitivna ili negativna. Mehanička shema deformacije prikazana je na slici 22.



Slika 22

5. OPERACIJE ZAPREMINSKOG OBLIKOVANJA

5.1. SABIJANJE

Sabijanjem se naziva tehnološka operacija obrade deformisanjem, pri kojoj se umanjuje visina početnog pripremka s jednovremenim povećanjem površine poprečnog preseka.

Po shemi deformacije sabijanje predstavlja deformaciju pritiska, jer je jedna deformacija negativna i po apsolutnoj vrednosti jednaka zbiru druge dve deformacije koje su pozitivne. U slučaju da su pozitivne deformacije jednake, javlja se slučaj prostog pritiska, dok se u slučaju da je jedna deformacija jednaka nuli javlja ravansko deformaciono stanje.

5.1.1. *SABIJANJE U IDEALNIM USLOVIMA*

Za slučaj ideanog sabijanja u materijalu se javlja linearno naponsko stanje sa naponom pritiska u pravcu dejstva sile. Deformaciona shema odgovara prostom pritisku. Normalni napon na kontaktnoj površini jednak je -K, a deformaciona sila data je izrazom:

$$F = K \cdot A \tag{5.1}$$

gde su: K specifični deformacioni otpor i

A projekcija kontaktne površine na ravan upravnu na pravac dejstva sile.

Deformacioni rad je dat izrazom:

$$W = \int_{h}^{h_0} F \cdot dh = \int_{h}^{h_0} K \cdot A \cdot dh \tag{5.2}$$